Тәжірибелік сабақ 8
Фурье әдісімен бірінші шекаралық есептерді шешу

Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін қойылатын бастапқы – бірінші шекаралық есепті қарастырайық:

$$U_t = U_{xx} \quad (x,t) \in Q = \{(x,t) \in R^2; 0 < x < 1,\ t > 0\} \qquad (1)$$

теңдеуінің

$$U(0,t) = U(1,t) = 0 \quad 0 < t < \infty \qquad (2)$$

шекаралық шарттарды

$$U(x,0) = \varphi(x) \quad 0 \le x \le 1 \qquad (3)$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын $C^{2,1}(Q) \cap C(\overline{Q})$ класында жататын классикалық шешімін табу керек.

Бұл есептің шешімін Фурье әдісін пайдаланып табамыз.

1-қадам. (1) теңдеуінің шешімін $U(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ түрінде іздестіреміз. $X(x)$ және $T(t)$ функцияларын табу үшін $U(x,t)$ функциясының дербес туындысын тауып, (1) теңдеуіне апарып қоямыз:

$$U_t(x,t) = X(x)T'(t) \quad U_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$$

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \qquad (4)$$

(4) теңдеуінің сол жағы t айнымалысына, ал оң жағы x айнымалысына байланысты функциялар. x және t тәуелсіз айнымалылар бір-біріне тәуелсіз болғандықтан (4) теңдеуінің әрбір жағы тұрақты болуы керек. Осы тұрақтыны -λ деп белгілейік. (λ алдындағы «-» таңбасы есепті шығаруға ыңғайлы болу үшін алынған). Онда

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

немесе

а) $T'(t) + \lambda T(t) = 0$, ә) $X''(x) + \lambda X(x) = 0$.

Енді а) және ә) жай дифференциалдық теңдеулерді шешу керек. Көңіл аударатын бір жағдай: (2) шекаралық шарттарды пайдаланып, ә) жай дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін емес, оның

$$U(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$U(1,t) = 0 \Rightarrow X(1)T(t) = 0 \Rightarrow X(1) = 0$$

шекаралық шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін іздестіреміз.

2-қадам.

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

Штурм-Лиувилль есебін шешеміз. Бұл есептің меншікті мәндері $\lambda_n = \pi^2 n^2, \quad n = 1,2...$, ал өзіндік функциялары $X_n = \sin \pi n x$ формуласы арқылы табылатындығы III тарауда көрсетілген болатын.

3-қадам. λ-параметрінің табылған $\pi^2 n^2$ мәндерін а) теңдеуіне қойып, оны шешеміз:

$$T' + \lambda T = 0 \Rightarrow T_n' + \pi^2 n^2 T_n = 0 \Rightarrow k_n + \pi^2 n^2 = 0 \Rightarrow k_n = -\pi^2 n^2 \Rightarrow T_n = A_n e^{-\pi^2 n^2 t}$$

4-қадам. 2-3 қадамдардың нәтижесін пайдаланып (9.2.1) теңдеуінің дербес шешімдерін жазамыз:

$$U_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = A_n \sin \pi n x \cdot e^{-\pi^2 n^2 t}$$

(1) теңдеуі біртекті және сызықты болғандықтан оның дербес шешімдерінің сызықты комбинациясынан тұратын

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\pi nx\cdot e^{-\pi^2n^2t} \qquad (5)$$

функциясы оның шешімі болады және (2) шекаралық шарттарын қанағаттандырады.

5-қадам. (3) бастапқы шартын пайдаланып (5) теңдігіндегі A_n коэффицентін анықтаймыз:

$$U(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\pi nx\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\pi nx=\varphi(x). \qquad (6)$$

(6) теңдігінен бастапқы $\varphi(x)$ функциясы Штурм-Лиувилль есебінің өзіндік функциялары арқылы Фурье қатарына жіктеліп тұрғанын көреміз. Бұл жағдайда Фурье қатарының коэффиценттерін

$$A_n=2\int_0^1\varphi(x)\sin(\pi nx)\,dx,\ n=1,2,... \qquad (7)$$

формулалары арқылы табамыз. Осы коэффициенттерді (5) теңдігіне апарып қойып, берілген (1)-(3) есебінің формальді шешімін аламыз.

1-мысал. Жылуөткізгіштік теңдеуіне қойылған бастапқы-екінші біртекті емес шекаралық (A):

$$u_t=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\ t>0 \qquad (8)$$

$$u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=Ae^{-t},\ t\ge 0 \qquad (9)$$

$$u(x,0)=T,\ 0\le x\le l \qquad (10)$$

есептің шешімін табу керек.

Шешу:

1-қадам. (A) есебінің жалғыз классикалық шешімі бар.

2-қадам. $u(0,t)=0$, $u_x(l,t)=Ae^{-t}$ шекаралық шарттарын қанағаттандыратын $\omega(x,t)=(\alpha_1x^2+\alpha_2x+\alpha_3)Ae^{-t}$ функциясын құрамыз: $\omega_x(x,t)=(2\alpha_1x+\alpha_2)Ae^{-t}$, $\omega_x(l,t)=(2\alpha_1l+\alpha_2)Ae^{-t}=Ae^{-t}$, $\alpha_1=0,\quad \alpha_2=1$. Сонымен, $\omega(x,t)=xAe^{-t}$ функциясы (A) есебінің шекаралық шарттарын қанағаттандыратын болады.

3-қадам. Жаңа белгісіз $v(x,t)=u(x,t)-\omega(x,t)$ функциясы үшін (B)

$$v_t=a^2v_{xx}+xAe^{-t},\quad 0<x<l,\quad t>0$$
$$v(0,t)=0,\quad v_x(l,t)=0,\quad t\ge 0$$
$$v(x,0)=Ax-T,\quad 0\le x\le l$$

есебін аламыз. Бұл есептің шешімін $v=u_1+u_2$ түрінде іздейміз. Мұндағы u_1 функциясы (C):

$$u_{1t}=a^2u_{1xx},\qquad 0<x<l,\quad t>0$$
$$u_1(0,t)=0,\quad u_{1x}(l,t)=0,\qquad t\ge 0$$
$$u_1(x,0)=Ax-T,\quad 0\le x\le l$$

есебінің шешімі, ал u_2 функциясы (D):

$$u_{2t}=a^2u_{2xx}+Axe^{-t},\qquad 0<x<l,\quad t>0$$
$$u_2(0,t)=0,\ u_{2x}(l,t)=0,\ t\ge 0$$
$$u_2(x,0)=0,\qquad 0\le x\le l$$

есебінің шешімі

4-қадам. (C) есебінің шешімін Фурье әдісін пайдаланып табамыз. $u_1(x,t)=X(x)T(t)$ болсын. u_1 функциясын теңдеуге және шекаралық шарттарға қою арқылы T функциясына байланысты бірінші ретті сызықты жай дифференциалдық теңдеуін, ал X функциясына байланысты Штурм-Лиувилль есебін аламыз. Бұл дәрісте (C) есебі қарастырылған (1)–(3) есебімен пара-пар болады. Сондықтан

$$T_n(t)=C_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t}, \qquad X_n(x)=\sin\frac{\pi n}{l}x\,, n\in N\,.$$

Олай болса (C) теңдеуінің жалпы шешімі:

$$u_1=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x\,.$$

Мұндағы, C_n кез-келген белгісіз тұрақты шама. Енді (C) есебінің бастапқы шартын пайдаланып, C_n тұрақты шаманы табайық:

$$\varphi(x)=Ax-T=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{\pi n}{l}x\,,$$

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l(A\xi-T)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi=\left|\begin{array}{l} u=A\xi-T\\ du=Ad\xi\\ dv=\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\\ v=-\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}\xi\end{array}\right|=$$

$$\frac{2}{l}\left((A\xi-T)\left(-\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}\xi\right)\Big|_0^l+\int_0^l A\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi\right)= \qquad (C)$$

$$\frac{2}{l}\left((Al-T)\left(-\frac{l}{\pi n}(-1)^n\right)+T\left(-\frac{l}{\pi n}\right)+A\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,\Big|_0^l\right)=\frac{2}{l}\left((Al-T)\left(\frac{l}{\pi n}(-1)^{n+1}\right)-\frac{lT}{\pi n}\right)=$$

$$\frac{2}{l}Al\frac{l}{\pi n}(-1)^{n+1}-\frac{2T}{l}\frac{l}{\pi n}(-1)^{n+1}-\frac{2T}{\pi n}=\frac{2Al}{\pi n}(-1)^{n+1}+\frac{2T}{\pi n}(-1)^n-\frac{2T}{\pi n}=$$

$$\frac{2Al}{\pi n}(-1)^{n+1}+\frac{2T}{\pi n}(-1)^n-\frac{2T}{\pi n}=\frac{2}{\pi n}\left(Al(-1)^{n+1}+T\left((-1)^n-1\right)\right)$$

есебінің шешімін

$$u_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\left(Al(-1)^{n+1}+T\left((-1)^n-1\right)\right)e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x$$

формуласы арқылы табамыз.

5-қадам. (D)есебінің шешімін

$$W(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\pi nx$$

түрінде іздестіреміз. Мұнда

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l A\xi e^{-t}\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi=\left|\begin{array}{l} u=\xi\\ du=d\xi\\ dv=\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi\\ v=-\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}\xi\end{array}\right|=\frac{2Ae^{-t}}{l}\left(-\xi\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}\xi\,\Big|_0^l+\frac{l}{\pi n}\int_0^l\cos\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi\right)=$$

$$=\frac{2Ae^{-t}}{l}\left(-\frac{l^2}{\pi n}(-1)^n+\frac{l^2}{(\pi n)^n}\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,\Big|_0^l\right)=\frac{2Ale^{-t}(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

$$T_n(t)=\int_0^t \frac{2Ale^{-\tau}(-1)^{n+1}}{\pi n} e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2(t-\tau)} d\tau=\frac{2Al(-1)^{n+1}}{\pi n}\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2(t-\tau)-\tau} d\tau=$$

$$=\int_0^t \frac{2Al(-1)^{n+1}}{\pi n} e^{-\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2 t+\left(\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2-1\right)\tau} d\tau=$$

$$=\frac{2Al(-1)^{n+1}}{\pi n}\cdot\frac{l^2}{(\pi a n)^2-l^2}\cdot e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2(t-\tau)-\tau}\Big|_0^t=\frac{2Al^3(-1)^{n+1}}{\pi n\left((\pi a n)^2-l^2\right)}\left(e^{-t}-e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t}\right)$$

болатынын ескеріп, (D) есебінің шешімін

$$u_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Al^3(-1)^{n+1}}{\pi n\left((\pi an)^2-l^2\right)}\left(e^{-t}-e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t}\right)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

формула арқылы табамыз.

6 –қадам. Сонымен (A) есептің шешімі:

$$u=u_1+u_2+\omega=$$

$$=xAe^{-t}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi n}\left(Al(-1)^{n+1}+T\left((-1)^n-1\right)\right)e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t}+\frac{2Al^3(-1)^{n+1}}{\pi n\left((\pi na)^2-l^2\right)}\left(e^{-t}-e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t}\right)\right]\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x.$$